# PART2 正接の加法定理，2 直線のなす角

## 要点 ① 正接の加法定理

正弦・余弦の加法定理から，正接の加法定理を導く。

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\underline{\hspace{6cm}}$$

分母，分子をそれぞれ $\cos\alpha\cos\beta$ で割ると

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

よって $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ …… (i)

(i)において，$\beta$ を $-\beta$ におき換えると

$$\tan\{\alpha+(-\beta)\}=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ より

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \quad \cdots\cdots \text{(ii)}$$

(i)，(ii)より，以下の定理が成り立つ。

**正接の加法定理**

**1** $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

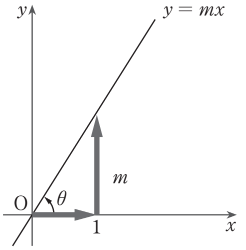
**2** $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

**例** $\tan 75^\circ=\tan(\qquad\qquad)$

$$=\underline{\hspace{4cm}}$$

$$=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

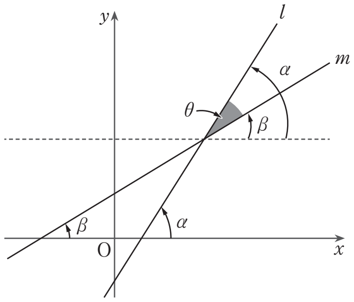
## 要点 ② 直線と $x$ 軸のなす角，2 直線のなす角




直線 $y=mx$ と $x$ 軸の正の向きのなす角を $\theta$ とすると，右図より

$$\text{直線の傾き } m=\frac{m}{1}=\tan\theta$$

つまり　$m=\tan\theta$ である。




右図のように，2 直線 $l$，$m$ と $x$ 軸の正の向きのなす角をそれぞれ $\alpha$，$\beta$ とすると，2 直線のなす角 $\theta$ は

$\theta=$

である。この角 $\theta$ について，正接の加法定理を用いると

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

となり，$\tan\theta$ の値は $\tan\alpha$，$\tan\beta$，すなわち 2 直線の傾きを用いて求めることができる。

一般に，互いに垂直でない 2 直線 $y=m_1x+n_1$ と $y=m_2x+n_2$ のなす角を $\theta$ とすると

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\quad\cdots\cdots\quad ①$$

が成り立つ。

2 直線のなす角 $\theta$ は，とくに断りがない限り $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で答える。①を満たす $\theta$ が $\dfrac{\pi}{2}<\theta\leqq\pi$ となった場合は，$\pi-\theta$ を 2 直線のなす角として答える。

**2**　2 直線 $y=3x$ ……①，$y=\frac{1}{2}x$ ……② と $x$ 軸の正の向きのなす角をそれぞれ $\alpha$，$\beta$ とする。

(1)　$\tan\alpha$，$\tan\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\tan(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

(3)　2 直線①，②のなす角 $\theta$ を求めよ。

## Point Pickup

**正接の加法定理**

**1**　$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

**2**　$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

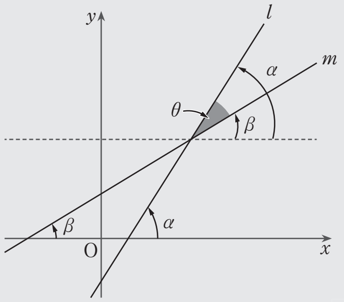
**2 直線のなす角と正接の値**

互いに垂直でない 2 直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ と $x$ 軸の正の向きのなす角をそれぞれ $\alpha$，$\beta$ とすると

$$m_1=\tan\alpha,\quad m_2=\tan\beta$$

よって，この 2 直線のなす角を $\theta$ とすると

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$



# 第 11 講　PART2 確認問題

2 直線 $y=5x$ ……①，$y=\dfrac{2}{3}x$ ……② と $x$ 軸の正の向きのなす角をそれぞれ $\alpha$，$\beta$ とする。

**1** $\tan\alpha=\boxed{\text{ア}}$，$\tan\beta=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

**2** $\tan(\alpha+\beta)=-\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

**3** 2 直線①，②のなす角を $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

# PART2 正接の加法定理，2 直線のなす角

**2** 2 直線 $y=3x$ ……①，$y=\dfrac{1}{2}x$ ……② と $x$ 軸の正の向きのなす角をそれぞれ $\alpha$，$\beta$ とする。

(1) $\tan\alpha$，$\tan\beta$ の値を求めよ。

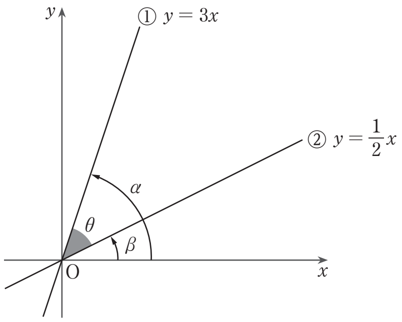
(2) $\tan(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

(3) 2 直線①，②のなす角 $\theta$ を求めよ。

**[解答]**

(1) $\tan\alpha=3$，$\tan\beta=\dfrac{1}{2}$

(2) $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{3+\frac{1}{2}}{1-3\cdot\frac{1}{2}}=\frac{6+1}{2-3}=-7$$




(3) $$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=\frac{6-1}{2+3}=1$$

よって　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

# 第11講　PART2 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：5，イ：2，ウ：3

**[解説]**

直線 $y=5x$ と $x$ 軸の正の向きのなす角が $\alpha$ であるから

$$\tan\alpha=\mathbf{5} \quad \text{[A]}$$

直線 $y=\dfrac{2}{3}x$ と $x$ 軸の正の向きのなす角が $\beta$ であるから

$$\tan\beta=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

[A]　直線 $y=mx$ と $x$ 軸の正の向きのなす角を $\theta$ とすると
直線の傾き $m=\tan\theta$

## 2

**[正解]** エオ：17，カ：7

**[解説]**

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{5+\dfrac{2}{3}}{1-5\cdot\dfrac{2}{3}}$$

$$=\frac{15+2}{3-10}$$

$$=-\mathbf{\frac{17}{7}}$$

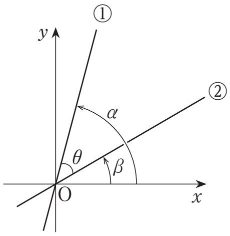
[B]　正接の加法定理
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

**3**　**[正解]** キ：4

**[解説]**

右図より，2 直線①，②のなす角 $\theta$ は [C]

$$\theta=\alpha-\beta$$




よって

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\ \text{[D]}$$

$$=\frac{5-\frac{2}{3}}{1+5\cdot\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{15-2}{3+10}=1$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

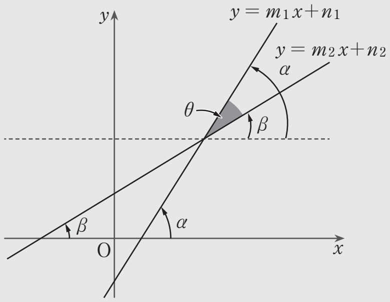
$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

[C]　互いに垂直でない 2 直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ と $x$ 軸の正の向きのなす角をそれぞれ $\alpha$，$\beta$ とすると

$m_1=\tan\alpha$，$m_2=\tan\beta$

この 2 直線のなす角を $\theta$ とすると

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$




[D]　正接の加法定理

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$